# FUNZIONI LOGICHE

## FORME CANONICHE SP E PS

Una funzione logica può essere espressa in quattro forme:

1. attraverso una proposizione logica;
2. attraverso una tabella della verità;
3. attraverso un'espressione algebrica;
4. attraverso un circuito logico.

Noi sappiamo già eseguire alcuni dei passaggi possibili tra le varie forme di espressione.

In particolare sappiamo, data una proposizione logica, costruire la tabella della verità.

Sappiamo inoltre, dato un circuito logico e/o un'espressione algebrica, ricavare la corrispondente tabella della verità. Sappiamo inoltre passare dall'espressione algebrica al circuito logico e viceversa. Quindi sappiamo svolgere quella che si chiama l'"analisi" di un circuito logico combinatorio cioè, dato il circuito sappiamo risalire alla tabella della verità e quindi dire cosa "fa" il circuito stesso.

Quello che non sappiamo ancora fare è il passaggio dalla tabella della verità all'espressione algebrica e quindi al circuito logico che la realizza. Non sappiamo cioè ancora fare la "sintesi" o il "progetto" di un circuito logico a partire dalla tabella della verità.

Non è unica l'espressione algebrica, e quindi il circuito logico, che realizza una stessa tabella della verità. Tra tutte le espressioni algebriche equivalenti di una stessa funzione binaria, ve ne sono due, dette "canoniche" di particolare interesse.

Prima di introdurre queste due espressioni, diamo due definizioni:

> **Dicesi *mintermine* o prodotto fondamentale o canonico, il prodotto di tutte le variabili di una data funzione, diritte o negate.**

> **Dicesi *maxtermine* o somma fondamentale o canonica, la somma di tutte le variabili di una data funzione, diritte o negate.**

Riportiamo di seguito tutti i mintermini ($P_n$) ed i maxtermini ($S_n$) di una funzione di tre variabili:

| A | B | C | $P_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $P_0$ $\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}$ | $S_0$ $A+B+C$ |
| 0 | 0 | 1 | $P_1$ $\overline{A}*\overline{B}*C$ | $S_1$ $A+B+\overline{C}$ |
| 0 | 1 | 0 | $P_2$ $\overline{A}*B*\overline{C}$ | $S_2$ $A+\overline{B}+C$ |
| 0 | 1 | 1 | $P_3$ $\overline{A}*B*C$ | $S_3$ $A+\overline{B}+\overline{C}$ |
| 1 | 0 | 0 | $P_4$ $A*\overline{B}*\overline{C}$ | $S_4$ $\overline{A}+B+C$ |
| 1 | 0 | 1 | $P_5$ $A*\overline{B}*C$ | $S_5$ $\overline{A}+B+\overline{C}$ |
| 1 | 1 | 0 | $P_6$ $A*B*\overline{C}$ | $S_6$ $\overline{A}+\overline{B}+C$ |
| 1 | 1 | 1 | $P_7$ $A*B*C$ | $S_7$ $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ |

Si usa indicare ciascun maxtermine e mintermine con un pedice.

Tale pedice, una volta scelta la variabile MSB (nel nostro esempio A) e quella LSB (nel nostro esempio C), ha per i **mintermini** un valore espresso in decimale corrispondente al numero binario che si ottiene associando uno 0 a ciascuna variabile binaria che compare negata ed un 1 a ciascuna variabile binaria che compare diritta.

Dualmente per i **maxtermini** il pedice ha un valore espresso in decimale corrispondente al numero binario che si ottiene associando un 1 a ciascuna variabile binaria che compare negata ed uno 0 a ciascuna variabile che compare diritta.

Come si dimostra facilmente con i Teoremi di De Morgan si ha:

$$P_i = \overline{S_i}$$

Si ha inoltre, per **i ≠ j**:

$$P_i * P_j = 0 \qquad\qquad S_i + S_j = 1$$

ed anche:

$$\sum_{j=0}^{7} P_j = 1 \qquad\qquad \prod_{j=0}^{7} S_j = 0$$

Una volta definito il significato di mintermine e di maxtermine vogliamo dimostrare che, data una funzione espressa in una qualsiasi delle sue possibili forme algebriche, **è sempre possibile scrivere questa funzione come somma di mintermini e come prodotto di maxtermini**.

Per fare questo dimostriamo prima il seguente teorema:

**TEOREMA DI ESPANSIONE O DI SHANNON: Data una qualsiasi funzione booleana di n variabili $f(x_1, x_2, \_\_\_\_, x_n)$, essa può sempre essere scritta nella forma:**

$$f(x_1, x_2, \_, x_i, \_\_, x_n) = x_i * f(x_1, x_2, \_, 1, \_\_, x_n) + \overline{x_i} * f(x_1, x_2, \_, 0, \_\_, x_n)$$

**o nella sua forma duale:**

$$f(x_1, x_2, \_, x_i, \_\_, x_n) = \left[x_i + f(x_1, x_2, \_, 0, \_\_, x_n)\right] * \left[\overline{x_i} + f(x_1, x_2, \_, 1, \_\_, x_n)\right]$$

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare la veridicità delle eguaglianze per i due valori che può assumere la variabile $x_i$, cioè 0 ed 1.

Per $x_i = 1$ la prima uguaglianza diventa:

$$f(x_1, x_2, \_, 1, \_\_, x_n) = f(x_1, x_2, \_, 1, \_\_, x_n)$$

Per $x_i = 0$ la prima uguaglianza diventa:

$$f(x_1, x_2, \_, 0, \_\_, x_n) = f(x_1, x_2, \_, 0, \_\_, x_n)$$

essendo le due uguaglianze trovate palesemente vere, è vera l'uguaglianza di partenza.

In modo del tutto analogo si dimostra l'altra eguaglianza.

Utilizziamo ora il Teorema di Shannon appena dimostrato per dimostrare il seguente teorema:

**TEOREMA: data una funzione binaria, è sempre possibile scrivere questa funzione come somma di mintermini e come prodotto di maxtermini.**

DIMOSTRAZIONE: Dimostreremo questo teorema per una funzione di tre variabili A, B e C.

Applicando ripetutamente il teorema di Shannon si ha:

$$f(A,B,C) = A * f(1,B,C) + \overline{A} * f(0,B,C) =$$

$$A * \left\{B * f(1,1,C) + \overline{B} * f(1,0,C)\right\} + \overline{A} * \left\{B * f(0,1,C) + \overline{B} * f(0,0,C)\right\} =$$

$$A * \left\{B * \left[C * f(1,1,1) + \overline{C} * f(1,1,0)\right] + \overline{B} * \left[C * f(1,0,1) + \overline{C} * f(1,0,0)\right]\right\} +$$

$$+\overline{A} * \left\{B * \left[C * f(0,1,1) + \overline{C} * f(0,1,0)\right] + \overline{B} * \left[C * f(0,0,1) + \overline{C} * f(0,0,0)\right]\right\}$$

sviluppando l'ultima espressione si ha:

$$f(A,B,C)=A*B*\left[C*f(1,1,1)+\overline{C}*f(1,1,0)\right]+A*\overline{B}*\left[C*f(1,0,1)+\overline{C}*f(1,0,0)\right]+$$
$$+\overline{A}*B*\left[C*f(0,1,1)+\overline{C}*f(0,1,0)\right]+\overline{A}*\overline{B}*\left[C*f(0,0,1)+\overline{C}*f(0,0,0)\right]=$$
$$A*B*C*f(1,1,1)+A*B*\overline{C}*f(1,1,0)+A*\overline{B}*C*f(1,0,1)+A*\overline{B}*\overline{C}*f(1,0,0)+$$
$$+\overline{A}*B*C*f(0,1,1)+\overline{A}*B*\overline{C}*f(0,1,0)+\overline{A}*\overline{B}*C*f(0,0,1)+\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}*f(0,0,0)$$

Ricordando come avevamo numerato i mintermini a pag. 1, l'ultima espressione può essere anche scritta nel modo seguente:

$$f(A,B,C)=P_7*f(1,1,1)+P_6*f(1,1,0)+P_5*f(1,0,1)+P_4*f(1,0,0)+$$
$$+P_3*f(0,1,1)+P_2*f(0,1,0)+P_1*f(0,0,1)+P_0*f(0,0,0) \quad (1)$$

nell'ultima espressione rimarranno solo i prodotti canonici o mintermini corrispondenti alle combinazioni per le quali la funzione vale 1.

Abbiamo così dimostrato in modo rigoroso che:

**Data una tabella della verità è sempre possibile trovare la FORMA CANONICA (che ora chiameremo di primo tipo o di tipo SP cioè SOMMA DI PRODOTTI o di MINTERMINI) della funzione binaria corrispondente, seguendo il seguente procedimento:**

- **si prendono in considerazione solo le combinazioni in corrispondenza delle quali la funzione vale 1;**
- **si scrivono i <u>Prodotti Canonici</u> (o Mintermini) corrispondenti, cioè si esegue il prodotto delle variabili, presa ognuna <u>diritta</u> se in quella combinazione essa vale 1 e <u>negata</u> se vale 0;**
- **si esegue la <u>somma di detti Prodotti Canonici</u> (o Mintermini).**

A partire dall'espressione (1), per dualità possiamo scrivere:

$$f(A,B,C)=\left[A+B+C+f(0,0,0)\right]*\left[A+B+\overline{C}+f(0,0,1)\right]*\left[A+\overline{B}+C+f(0,1,0)\right]*$$
$$*\left[A+\overline{B}+\overline{C}+f(0,1,1)\right]*\left[\overline{A}+B+C+f(1,0,0)\right]*\left[\overline{A}+B+\overline{C}+f(1,0,1)\right]*$$
$$*\left[\overline{A}+\overline{B}+C+f(1,1,0)\right]*\left[\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+f(1,1,1)\right]$$

Ricordando come avevamo numerato i maxtermini a pag. 1, l'ultima espressione può essere anche scritta nel modo seguente:

$$f(A,B,C)=\left[S_0+f(0,0,0)\right]*\left[S_1+f(0,0,1)\right]*\left[S_2+f(0,1,0)\right]*\left[S_3+f(0,1,1)\right]*$$
$$*\left[S_4+f(1,0,0)\right]*\left[S_5+f(1,0,1)\right]*\left[S_6+f(1,1,0)\right]*\left[S_7+f(1,1,1)\right] \quad (2)$$

In quest'ultima espressione rimarranno solo le somme canoniche o maxtermini corrispondenti alle combinazioni per le quali la funzione vale 0; infatti negli altri casi la somma tra il maxtermini ed il valore che assume la funzione vale comunque 1 e quindi non dà alcun contributo al prodotto di somme.

Abbiamo così dimostrato in modo rigoroso che:

**Data una tabella della verità è possibile trovare la FORMA CANONICA (che ora**

**chiameremo di secondo tipo o di tipo PS cioè PRODOTTO DI SOMME o di MAXTERMINI) della funzione binaria corrispondente, seguendo il seguente procedimento:**

- **si prendono in considerazione solo le combinazioni in corrispondenza delle quali la funzione vale 0;**
- **si scrivono le Somme Canoniche (o Maxtermini) corrispondenti, cioè si esegue la somma delle variabili, presa ognuna diritta se in quella combinazione essa vale 0 e negata se vale 1;**
- **si esegue il prodotto di dette Somme Canoniche (o Maxtermini).**

Applichiamo ora quanto dimostrato nell'esempio che segue.

*ESEMPIO N.1: Sia data la funzione binaria espressa dalla tabella della Verità riportata. Vogliamo trovare entrambe le forme canoniche, cioè quella di Primo tipo Somma di Prodotti, sia quella di Secondo tipo Prodotto di somme.*

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | **0** |

*La funzione vale 1 solo per le combinazioni:*

*f(0,1,1), f(1,0,1), f(1,1,0)*

*Di conseguenza la Prima forma canonica è:*

$$f(A,B,C) = A*B*\overline{C}*f(1,1,0) + A*\overline{B}*C*f(1,0,1) + \overline{A}*B*C*f(0,1,1) =$$
$$= A*B*\overline{C} + A*\overline{B}*C + \overline{A}*B*C = P_6 + P_5 + P_3 = \sum(3,5,6)$$

*La funzione vale 0 per le combinazioni:*

*f(0,0,0), f(0,0,1), f(0,1,0), f(1,0,0), f(1,1,1)*

*Di conseguenza la Seconda Forma canonica è:*

$$f(A,B,C) = \left[A+B+C+f(0,0,0)\right]*\left[A+B+\overline{C}+f(0,0,1)\right]*$$
$$*\left[A+\overline{B}+C+f(0,1,0)\right]*\left[\overline{A}+B+C+f(1,0,0)\right]*\left[\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+f(1,1,1)\right] =$$
$$= \left[A+B+C\right]*\left[A+B+\overline{C}\right]*\left[A+\overline{B}+C\right]*\left[\overline{A}+B+C\right]*\left[\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\right] =$$
$$= S_0 * S_1 * S_2 * S_4 * S_7 = \prod(0,1,2.4.7)$$

- ***NOTA 1: Nella forma canonica PS sono presenti i maxtermini di pedice diverso di quello dei mintermini presenti nella forma canonica SP. Se ad esempio una funzione binaria di tre variabili presenta nella forma SP i mintermini $P_0$, $P_3$, $P_6$, $P_7$, presenterà nella forma PS i maxtermini $S_1$, $S_2$, $S_4$, $S_5$, e si potrà scrivere:***

$$\sum(0,3,6,7) = \prod(1,2,4,5)$$

È sempre possibile, data una funzione in una sua qualsiasi forma algebrica, arrivare alla sua forma canonica di tipo SP. Il procedimento è il seguente:

1) esecuzione delle operazioni indicate, se necessario usando anche i teoremi di De Morgan, fino ad arrivare ad una espressione di somma di prodotti.

2) nel caso la forma somma di prodotti trovata in 1) non risulti composta di tutti prodotti canonici, cioè contenenti **tutte** le variabili dell'espressione, basterà per rendere canonico un prodotto mancante delle variabili $X_i$, $X_j$, .... ,$X_k$ moltiplicare tale prodotto per:

$$\left(X_i+\overline{X_i}\right)*\left(X_j+\overline{X_j}\right)*.........*\left(X_k+\overline{X_k}\right)$$

*ESEMPIO N.2: Ricavare la forma canonica SP della funzione binaria:*

$$f\left(A,B,C\right)=A+B*\left(C+\overline{A}\right)$$

*Sviluppiamo la funzione fino ad ottenere una somma di prodotti:*

$$f\left(A,B,C\right)=A+B*\left(C+\overline{A}\right)=A+B*C+\overline{A}*B$$

*introduciamo ora le variabili mancanti affinché i prodotti siano tutti canonici:*

$$f\left(A,B,C\right)=A*\left(B+\overline{B}\right)*\left(C+\overline{C}\right)+B*C*\left(A+\overline{A}\right)+\overline{A}*B*\left(C+\overline{C}\right)=$$
$$=A*B*C+A*B*\overline{C}+A*\overline{B}*C+A*\overline{B}*\overline{C}+A*B*C+\overline{A}*B*C+\overline{A}*B*C+\overline{A}*B*\overline{C}=$$
$$=\overline{A}*B*\overline{C}+\overline{A}*B*C+A*\overline{B}*\overline{C}+A*\overline{B}*C+A*B*\overline{C}+A*B*C=$$
$$=P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7=\sum\left(2,3,4,5,6,7\right)$$

In modo analogo è sempre possibile, data una funzione in una sua qualsiasi forma algebrica, arrivare alla sua forma canonica di tipo PS. In questo caso si può procedere in due modi:

A. Si ricava come detto sopra la forma canonica SP, e da essa la forma PS utilizzando quanto riportato nella Nota 1.
B. Si applica la proprietà distributiva

$$A+\left(B*C\right)=\left(A+B\right)*\left(A+C\right)$$

e si sfrutta la proprietà

$$A*\overline{A}=0$$

per introdurre le variabili eventualmente mancanti.

*ESEMPIO N.3: Ricavare la forma canonica PS della funzione binaria dell'Esempio 2:*

$$f\left(A,B,C\right)=A+B*\left(C+\overline{A}\right)$$

*MODO A: Nello svolgimento dell'Esempio 2 abbiamo trovato:*

$$f\left(A,B,C\right)=\overline{A}*B*\overline{C}+\overline{A}*B*C+A*\overline{B}*\overline{C}+A*\overline{B}*C+A*B*\overline{C}+A*B*C=$$
$$=P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7=\sum\left(2,3,4,5,6,7\right)$$

*Questa è la forma SP.*

*Da quanto detto nella NOTA 1 si ricava che la forma canonica PS è:*

$$f\left(A,B,C\right)=\sum\left(2,3,4,5,6,7\right)=\prod\left(0,1\right)=S_0*S_1=\left(A+B+C\right)*\left(A+B+\overline{C}\right)$$

*MODO B: Applicando la proprietà distributiva*

$$A+\left(B*C\right)=\left(A+B\right)*\left(A+C\right)$$

*si ha:*

$$f(A,B,C) = A + B*\left(C+\overline{A}\right) = (A+B)*[A+(C+\overline{A})] = \left(A+B\right)*[C+1] = \left(A+B\right) =$$
$$= \left(A+B\right) + (C*\overline{C}) = A+B+C*\overline{C} = A+(B+C)*(B+\overline{C}) = (A+B+C)*(A+B+\overline{C}) =$$
$$= S_0 + S_1 = \prod(0.1)$$

*ESEMPIO N.4: Scrivere in forma canonica PS la funzione sotto riportata:*

$$f(A,B,C) = A*C + B*C$$

*MODO A: Troviamo la forma canonica SP:*

$$f(A,B,C) = A*C + B*C = (A*C)*(B+\overline{B})+B*C*(A+\overline{A})=$$
$$=A*B*C+A*\overline{B}*C+A*B*C+\overline{A}*B*C=P_7+P_5+P_3 = \sum(3,5,7)$$

*Quindi la forma canonica SP è:*

$$f(A,B,C) = \sum(3,5,7) = \prod(0,1,2,4,6) = S_0*S_1*S_2*S_4*S_6 =$$
$$= (A+B+C)*(A+B+\overline{C})*(A+\overline{B}+C)*(\overline{A}+B+C)*(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

*MODO B: Applicando la proprietà distributiva*

$$A+\left(B*C\right) = \left(A+B\right)*\left(A+C\right)$$

*si ha:*

$$f(A,B,C) = A*C + B*C = C*(A+B) = (C+B*\overline{B})*(A+B+C*\overline{C}) = (C+B)*(C+\overline{B})*[(A+B+C)*(A+B+\overline{C})] =$$
$$=(C+B+A*\overline{A})*(C+\overline{B}+A*\overline{A})*[(A+B+C)*(A+B+\overline{C})] =$$
$$= (C+B+A)*(C+B+\overline{A})*(C+\overline{B}+A)*(C+\overline{B}+\overline{A})*(A+B+C)*(A+B+\overline{C}) =$$
$$(A+B+C)*(\overline{A}+B+C)*(A+\overline{B}+C)*(\overline{A}+\overline{B}+C)*(A+B+\overline{C}) = S_0*S_4*S_2*S_6*S_1 = \prod(0,1,2,4,6)$$

*ESEMPIO N.5: Scrivere la funzione sotto riportata in forma canonica PS.*

$$f(A,B,C) = (A+\overline{B})*\overline{A}*B+C$$

*MODO A: Troviamo la forma canonica SP:*

$$f(A,B,C) = (A+\overline{B})*\overline{A}*B+C = A*\overline{A}*B+\overline{B}*\overline{A}*B+C = C =$$
$$= C(A+\overline{A}) = C*A+C*\overline{A} = C*A*(B+\overline{B})+C*\overline{A}*(B+\overline{B}) =$$
$$= A*B*C+A*\overline{B}*C+\overline{A}*B*C+\overline{A}*\overline{B}*C = P_7+P_5+P_3+P_1$$

*Quindi la forma canonica PS è:*

$$f(A,B,C) = P_7+P_5+P_3+P_1 = \sum(1,3,5,7) = \prod(0,2,4,6) = S_0*S_2*S_4*S_6 =$$
$$= (A+B+C)*(A+\overline{B}+C)*(\overline{A}+B+C)*(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

*MODO B: Applicando la proprietà distributiva*

$$A+\left(B*C\right) = \left(A+B\right)*\left(A+C\right)$$

$$f(A,B,C) = (A+\overline{B})*\overline{A}*B+C = C+A*\overline{A} = (C+A)*(C+\overline{A}) = (C+A+B*\overline{B})*(C+\overline{A}+B*\overline{B}) =$$
$$= (C+A+B*\overline{B})*(C+\overline{A}+B*\overline{B}) = (C+A+B)*(C+A+\overline{B})*(C+\overline{A}+B)*(C+\overline{A}+\overline{B}) =$$
$$= (A+B+C)*(A+\overline{B}+C)*(\overline{A}+B+C)*(\overline{A}+\overline{B}+C) = S_0*S_2*S_4*S_6 = \prod(0,2,4,6)$$